Determinan (matriks)

Juwairiah,S.Si.,M.T

- Syarat :

  Matriks mempunyai determinan jika matriks tersebut matriks bujursangkar (ordo nx n)

- Notasi :

  Det A = |A|

Cara Mencari Determinan :

1. Dengan Aturan Sarrus
2. Ekspansi Kofaktor / Uraian Laplace
3. Dengan Reduksi Baris / Kolom

1. ATURAN SARRUS

- Matriks 2x2 → dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

- Matriks 3x3 → dg cara menambahkan 2 kolom pertama di kanan dan mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal (kanan +, kiri –)

$$\text{Det} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11}.\ a_{22}.\ a_{33}) + (a_{12}.\ a_{23}.\ a_{31}) + (a_{13}.\ a_{21}.\ a_{32})$$
$$- (a_{13}.\ a_{22}.\ a_{31}) - (a_{11}.\ a_{23}.\ a_{32}) - (a_{12}.\ a_{21}.\ a_{33})$$

Contoh

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 3.7 = 12 - 21 = -9$

2. $|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right.$

$= (3.2.4+1.2.3+2.1.2) - (2.2.3+3.2.2+1.1.4)$

$= (24+6+4) - (12+12+4)$

$= 34 - 28$

$= 6$

2. Ekspansi kofaktor

Minor = M_{ij} = Determinan yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\ a_{33} - \ a_{23}a_{32}$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\ a_{33} - \ a_{23}a_{31}$

Kofaktor =Cij = $(-1)^{i+j}$. Mij

2. Ekspansi kofaktor

Det A = $\sum a_{ij}.Cij$ → dengan memilih salah satu baris/ kolom

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor :

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + \ldots + a_{in}\ C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{ij}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + \ldots + a_{nj}\ C_{jn}$$

Contoh 6 :

Hitunglah Det(A) dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Det (A) = $\sum_{j=1}^{3} a_{3j} . c_{3j}$

$$= a_{31}\ C_{31} + a_{32}\ C_{32} + \ a_{33}\ C_{33}$$

$$= 0 + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

- $$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Det (A) = $\sum_{i=1}^{3} a_{i3} . c_{i3}$

$$= a_{13}\ C_{13} + a_{23}\ C_{23} + \ a_{33}\ C_{33}$$

$$= 0 + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Contoh :

1. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CONTOH

- Solusi Persamaan Kriging dapat dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Variogram antar titik nilai titik variogram titik estimasi

Nilai variogram antar titik dapat dinyatakan sebagai NILAI DETERMINAN. Pertanyaan : hitung nilai variogram antar titik

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

1. Jika ada salah satu baris atau kolom yang seluruh elemennya nol, maka Determinan = 0

2. Jika A adalah matriks segitiga atau matriks diagonal maka Determinannya adalah hasil kali elemen2 diagonal utamanya

3. Jika A' adalah matriks yang didapat jika salah satu baris atau kolom matriks A dikalikan dengan skalar k, maka Det (A') = k. Det (A)

4. Jika ada 2 baris matriks A ditukar maka

$$\text{Det}(A') = -\text{Det}(A)$$

5. Jika A' adalah matriks yang didapat jika salah satu baris/kolom matriks A dikalikan dengan skalar k kemudian ditambahkan ke baris/kolom lain, maka Det (A') = Det (A)

Sifat-sifat determinan

6. Jika terdapat 2 baris/kolom yang mempunyai elemen yang sama atau kelipatannya, maka Det = 0

7. Jika A adalah sebarang matriks persegi, maka det(A) = det(A^T)

8. Jika A dan B adalah matriks kuadrat yang ukurannya sama, maka det(AB) = det(A) det(B)

9. Sebuah matriks kuadrat dapat dibalik (mempunyai invers) jika dan hanya jika det(A) $\neq$ 0

10. Jika A dapat dibalik (invers), maka det(A^{-1}) = 1/ det (A)

REDUKSI BARIS/KOLOM

1. Mengalikan suatu baris/kolom dengan konstanta tak nol.

2. Menukar posisi dua baris/kolom sebarang.

3. Menambahkan kelipatan atau perkalian dengan konstanta tak nol suatu baris/kolom ke baris/kolom lainnya

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ -6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

3. dengan Reduksi Baris (OBE)

- Caranya : mereduksi matriks ke bentuk eselon baris, dapat berupa matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah atau matriks diagonal
- Dengan nilai determinannya adalah hasil perkalian elemen-elemen pada diagonal utama.

Contoh 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{B3} - 2\text{B2}]{\text{B2} - 2\text{B1}} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matriks segitiga atas

Det = 1. (– 3).(– 9) = 27

Contoh 2 :

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

pertukaran baris ke - 1 dan ke - 2

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad -2b_1 + b_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Pertukaran baris ke - 2 dan ke - 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3b_2 + b_3$$

= 1.1.4= 4 (hasil perkalian semua unsur diagonalnya)