IV. SISTEM PERSAMAAN LINIER (1)

Juwairiah, S.Si., M.T
Matriks dan Ruang Vektor (MRV)
Teknik Informatika-UPNVY

Materi

1. METODE CRAMER
2. METODE INVERS

Penyajian SPL dalam bentuk Matrix

- SPL dengan n variabel :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

- SPL disajikan dalam bentuk matriks:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

Atau AX = B

SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

Bentuk umum :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel tak diketahui, a_{ij} , b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ bil. diketahui.
Ini adalah SPL dengan m persamaan dan n variabel.

SPL

- Mempunyai penyelesaian disebut KONSISTEN
  - TUNGGAL
  - BANYAK
- Tidak mempunyai penyelesaian disebut TIDAK KONSISTEN

Pembagian SPL

1. **SPL HOMOGEN**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Contoh:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

2. SPL Non Homogen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Contoh:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$X_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

CARA MENYELESAIKAN SPL

Terdapat 3 metode, yaitu :

1. Metode Cramer → dengan Determinan
2. Metode Invers
3. Metode OBE (Operasi Baris Elementer) → Eliminasi Gauss atau Gauss - Jordan

I. METODE CRAMER

Δ_i = Determinan yang didapat dari matriks A dengan mengganti kolom ke-i dengan elemen B

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Penyelesaiannya :

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

II. METODE INVERS

$$A.X = B$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B$$

Contoh 1

Tentukan x dan y yang memenuhi SPL berikut :

$$2x - 3y = 5$$
$$4x + 6y = 22$$

Dengan metode:

a. Aturan Cramer
b. Invers

KUIZ

1. Selesaikan SPL berikut:

$$a + c = 4$$
$$a - b = -1$$
$$2b + c = 7$$

Dengan cara:

a) Metode Cramer
b) Metode Invers

2. Tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 yang memenuhi SPL berikut:

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Dengan salah satu cara : Metode Cramer atau Metode Invers

3. Tentukan x, y, dan z

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$