KALKULUS I

Juwairiah, S.Si, M.T
UPN"Veteran" Yogyakarta

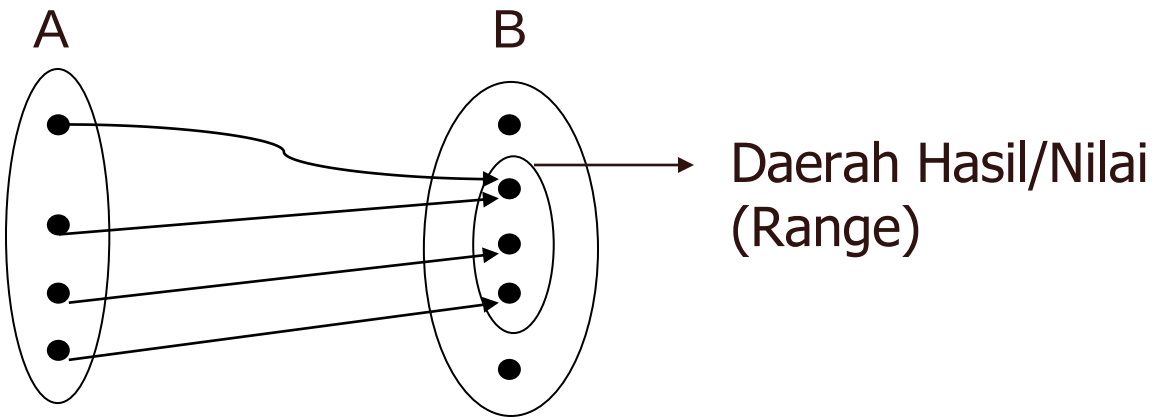
BAB II
FUNGSI DAN GRAFIK

Sub Pokok Bahasan

- Definisi Fungsi
- Daerah asal alamiah (Domain) dan Daerah Hasil (Range)
- Jenis-Jenis Fungsi
- Operasi Fungsi
- Komposisi Fungsi
- Fungsi Invers
- Grafik Fungsi

Definisi Fungsi:

- Fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A ke tepat satu anggota himpunan B.
- A = Daerah Asal = Domain
  B = Daerah Kawan = Kodomain



Diberikan fungsi y = f(x) → x= variabel bebas
↘ y= variabel tak bebas

Dipandang dari letak variabel bebas dan tak bebas, fungsi dibedakan menjadi 2, yaitu :

1. Fungsi Eksplisit : $y = f(x)$

   Contoh: $y = x + 1$

   $y = x^2 + 2x + 3$

2. Fungsi Implisit : $y - f(x) = 0$ atau : $f(x,y)$

   Contoh : $y^3 - x^2y - 6 = 0$

   $y^2 - 2.sin(xy) + x^2 = 0$

Definisi Nilai Fungsi:

f(a) adalah nilai *f* jika *x* = a

Contoh :

1). Diketahui : $f(x) = x^2 + 2x - 1$,maka :

a. $f(0) = 0^2 + 2.0 - 1 = -1$

b. $f(1) = 1^2 + 2.1 - 1 = 2$

c. $f(-2) = (-2)^2 + 2.(-2) - 1 = -1$

d. $f(a) = a^2 + 2a - 1$

e. $f(a + h) = (a + h)^2 + 2(a + h) - 1$

$= a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1$

f. $f(x+1)$

Script maple

```
> f:=x->x^2+2*x-1;
> f(0);
> f(1) ;
> f(-2);
> f(a) ;
> f( a + h);
> expand(f(a+h));
> f(x+1);
> expand(f(a+h));
```

2) Diketahui g(x) = $\frac{1}{x}$

Sederhanakan

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

Script maple :

```
> g:=x->1/x;
>(g(a+h)-g(a))/h;
> simplify((g(a+h)-g(a))/h);
```

DAERAH ASAL ALAMIAH (DOMAIN) DAN DAERAH NILAI (RANGE)

Definisi :

- Daerah Asal Alamiah (Dx) = himpunan bilangan real x terbesar sehingga f terdefinisi atau mempunyai nilai real
- Daerah Nilai /Range (Ry) = himpunan bil riil y yang merupakan hasil pemetaan fungsi *f*

Contoh :

1) Diberikan $f(x) = x^2$

$Dx = \{x \in R\}$

$Ry = \{y \in R \mid y \geq 0\}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$Dx = \{ x \in R \mid x \neq 2\}$ *

$Ry = \{ y \in R \mid y \neq 0\}$

* Pembagian → Penyebut tidak boleh = 0

3) f (x) = $\sqrt{25 - x^2}$

f mempunyai nilai real jika : $25 - x^2 \geq 0$ *

$25 \geq x^2$

$x^2 \leq 25$

$|x| \leq 5$ atau $-5 \leq x \leq 5$

- $Dx = \{ x \in R \mid -5 \leq x \leq 5 \}$
- $Ry = \{ y \in R \mid y \geq 0 \}$

* Bilangan dalam akar harus ≥ 0

4) $f(x) = x^2 + 2$

$Dx = \{ x \in R \} = R$

$Ry = \{ y \in R \mid y \geq 2 \}$

5) $f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow Dx = \{ x \in R \} = R$

$= (x - 1)^2 \qquad Ry = \{ y \in R \mid y \geq 0 \}$

6) $g(x) = x + 3 \rightarrow Dx = \{ x \in R \} = R$

$Ry = \{ y \in R \} = R$

7) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5x+6} \rightarrow Dx = \{ x \in R \mid x \neq -2 \text{ dan } x \neq -3 \}$

$Ry = \{ y \in R \mid y \neq 0 \}$

8) $f(x) = \log(x^2 - 7x + 12) \rightarrow$ Bil dalam log > 0

Soal

Tentukan domain :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$

2. $f(x) = \frac{1}{x+5} + log(x^2 - x - 6)$

- Penentuan daerah asal fungsi sangat penting dalam pemrograman, untuk menentukan agar fungsi mempunyai nilai riil (terdefinisi).
- Jika tidak didefinisikan, maka fungsi bisa menjadi tidak terdefinisi (*undefined*), misalnya : pembaginya nol, akar dari bilangan bilangan negatif, sehingga program menjadi error

JENIS - JENIS FUNGSI

- Fungsi
  - Aljabar
    - Rasional
    - Irrasional / akar
  - Transenden
    - Trigonometri
    - Siklometri
    - Logaritma
    - Eksponen

FUNGSI ALJABAR

- Fungsi konstan : $f(x) = k$, k = konstanta

  Contoh : f (x) = 2, f(x)= 5, dll
- Fungsi identitas : $f(x) = x$
- Fungsi polynomial/suku banyak (berderajat n)

  $f(x) = a_n.x^{n} + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

  jika n = 1→ fungsi linier f(x) = ax + b

  Contoh : f(x) = x + 2,f(x)= 2x – 4

  fs kuadrat : $f(x) = x^2 + 3x-4$

  fs pangkat 3 : $f(x) = 2x^3 + 4x^2+5x+7$

- Pembagian 2 fungsi polinomial = <u>Fungsi Rasional</u>
- <u>Fungsi irrasional, ex : f(x) =$\sqrt{x+1}$</u>

FUNGSI TRIGONOMETRI (sin x, cos x, tan x)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Kesamaan 2 sudut

$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Kesamaan Phytagoras

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Kesamaan ganjil genap

1) sin (-x) = - sin x

2) cos (-x) = cos x

3) tan (-x) = - tan x

Jumlah dan selisih sudut

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Soal 1

Tentukan x ($0^o < x < 360^o$) yang memenuhi persamaan

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$

Soal 2

Diketahui: cos (x+y) = 5/7,

cos x. cos y = 2/3 dan tan x = a.

maka tan y = ?

FUNGSI SIKLOMETRI

- $x = \sin t \rightarrow t = \arcsin x$
- $x = \cos t \rightarrow t = \arccos x$
- $x = \tan t \rightarrow t = \arctan x$

FUNGSI LOGARITMA

- Log a = ${}^{10}\log a$
- ${}^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a}$
- log a + log b = log (a.b)
- log a – log b = log $\dfrac{a}{b}$
- log 1 = 0
- log a^n = n. log a

Logaritma Natural = ln

- ln a = ${}^{e}\log a = \dfrac{\log a}{\log e}$, e = 2,718...
- $e^{\ln x} = x$

Ketaksamaan Logaritma

Jika ${}^{a}\log b < {}^{a}\log c \rightarrow b < c$ jika $a > 1$

$b > c$ jika $0 < a < 1$

Contoh soal

1. ${}^{5}\log(3x+5) < {}^{5}\log 35$
2. ${}^{1/3}\log(2x+3) > {}^{1/3}\log 15$
3. ${}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log x \geq 3$
4. ${}^{4}\log(2x^2+24) < {}^{4}\log(x^2+10x)$
5. ${}^{6}\log(x^2-16) - {}^{6}\log(2x-7) > 2 - {}^{6}\log 9$

FUNGSI EKSPONEN

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m.n}$
- $\sqrt[m]{x} = x^{1/m}$
- $\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$

Contoh soal

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x-31} \leq 8$

2. $3^{x^2+3x+4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$

3. $4^{x+3} = \sqrt[4]{8^{x+5}}$