**BAB III**

**PENGGUNAAN INTEGRAL**

**A. LUAS DAERAH BIDANG DATAR**

**Luas Daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), garis x = a, x = b dan sumbu X**

- Di atas Sumbu X - Di bawah Sumbu X

Y

X

Y

0

a

b

b

a

0

X

L = 

L = 

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva x = g(y), garis y = c, y = c, y = d, dan sumbu Y.

Y

 L = 

d

X

c

 **Luas Daerah yang dibatasi 2 kurva**

 y2 = f 2(x)

 y1 = f 1(x) L = 

 L = 

a

b

 x1 = g t(y) x2 = g 2(y)

 L = 

 L = 

Contoh :

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = sin x, dikuadran I (0 ≤ x ≤ π/2)

 L = 

1

 L = - [cos π/2 – cos 0]

 L = - (0 – 1) = 1

X

π

π/2

0

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh y = cos x, 0 ≤ x ≤ π

 L = LI + LII

Y

 = 

 = [sin x] - [sin x]

π/2

0

π

X

 = [sin π/2 – sin 0] - [sin π – sin π/2]

 = [ 1 – 0 ] – [ 0 – 1 ]

 = 1 + 1 = 2

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva y2 = x dan garis x = 4

x = 4

2

 y2 = x → y = 

-2

Cara 1 : Terhadap sumbu X Cara 2 : Terhadap sumbu Y (2 kurva)

 Batas x = 0 dan x = 4 Batas y = -2 dan y = 2

 L =  L = 

 =  L = 

 =  = 2 [ 8 – 8/3 ] = 32/3

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva y = x2 dan garis y = x

y = x2

 Titik potong :

 x2 = x

y = x

 x2 – x = 0

 x ( x – 1 ) = 0

0

 x = 0 x = 1

 L = 

**B. VOLUME BENDA PUTAR**

 **METODE CAKRAM**

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), x = a, x = b dan Sumbu X diputar mengelilingi sumbu X

 Vx = π 

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva x = g(y), y = c, y = d dan Sumbu Y diputar mengelilingi sumbu Y

 Vx = π 

**METODE KULIT TABUNG**

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), x = a, x = b dan Sumbu X diputar mengelilingi Sumbu Y

 Vy = 2π 

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva x = g(y), y = c, y = d dan Sumbu Y diputar mengelilingi Sumbu X

 Vy = 2π 

**METODE CINCIN**

Jika daerah yang dibatasi 2 fungsi :

Diputar mengelilingi Sumbu X

 Vx = π 

Diputar mengelilingi sumbu Y

 Vx = π 

Contoh :

1. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi kurva y = x2, x = 0, x = 2, diputar mengelilingi sumbu X dan sumbu Y

 a) Vx = π  (M.Cakram)

 = π 

 b) Vy

 Cara 1 : Metode Kulit Tabung

0

2

 Vy = 2π 

 = 2π 

 Cara 2 : Metode Cincin

 Vy = π 

 = π 

2. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi kurva y = x3, y = 0, y = 3, diputar mengelilingi sumbu Y dan sumbu X

 a) Vy = π (Metode Cakram)

y = x3

3

 = π

 = π 

 b) Vx = 2π  (Metode Kulit Tabung)

 = 2π 

 = 2π 

 = 

3. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi kurva y = x2, dan y2 = 8x diputar mengelilingi sumbu X dan sumbu Y

 a) Vx = π

y2 = 8x

y = x2

 = π 

 = π 

2

0

 b) Vy = π 

 = π

 = π 

**C. LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR**

1. Jika persamaan kurva berbentuk : y = f(x), a ≤ x ≤b, diputar mengelilingi sumbu X, maka luas permukaan benda putar :

 A = 2π 

 Contoh :

 1. Tentukan luas permukaan benda putar jika kurva y =  0 ≤ x ≤ 4, diputar mengelilingi sumbu X

y = 

0

4

 y =  → dy/dx = 1/(2)

 A = 2π

 = 2 π

 = 2 π 

2. Jika persamaan kurva berbentuk : x = g(y), c ≤ y ≤ d, diputar mengelilingi sumbu Y, maka luas permukaan benda putar :

 Contoh :

 A = 2 π 

 1. Tentukan luas permukaan benda putar jika kurva x = , -a ≤ y ≤ a, diputar mengelilingi sumbu Y

 x = 

 A = 2 π 

 = 2 π 

 = 2 π 

 = 2 π 

**D. PANJANG TALI BUSUR**

Y

S

D

c

X

b

a

1. Jika persamaan kurva : y = f(x), a ≤ x ≤ b, maka panjang tali busur :

 Sx = 

2. Jika persamaan kurva : x = g(y), c ≤ y ≤ d, maka panjang tali busur :

 Sy = 

3. Jika kurva mempunyai persamaan parameter x = f(t), y = g(t), t1 ≤ t ≤ t2, maka panjang tali busur :

 S = 

 

 Contoh :

 1. Hitunglah panjang tali busur kurva y = x2, dari x = 0 sampai x = 2 y = x2 → dy/dx = 2x

 Panjang tali busur :

 Sx = 

 = ½ 

 = ¼ 

 = ¼ 

 = ¼ [4

 2. Hitung panjang busur kurva x = 2.y3/2 antara titik (1,1) dan (8,4) x = 2.y3/2 → dx/dy = 2.(3/2y1/2) = 3.y1/2 dengan batas y = 1 dan y = 4

 Panjang tali busur :

 Sy = 

 =  Subst : u 1 + 9y → du = 9dy → dy = 1/9 du

 Batas : x = 1 → u = 10

 x = 4 → u = 37

 = 

 = 

 3. Hitung panjang busur kurva yang mempunyai persamaan parameter :

 x = 2t + 1 dan y = t2 – 1, 0 ≤ t ≤ 3

Y

8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| T | x | y |
| 0 | 1 | -1 |
| 1 | 3 | 0 |
| 2 | 5 | 3 |
| 3 | 7 | 8 |

X

3

2

4

6

5

7

1

0

 x = 2x + 1 → dx/dt = 2

 y = t2 - 1 → dy/dt = 2t

 S = 

 = 

 = 2

 = 

 = 3

 = 3

1. Hitung keliling daerah yang dibatasi oleh kurva y = x2 + 1 dan y = 3x + 1

 Titik potong :

S2

 x2 + 1 = 3x + 1

 x2 – 3x = 0

S1

 x (x – 3) = 0

 x = 0 dan x = 3

3

0

 y = x2 + 1 → dy/dx = 2x

 S1 = 

 = ½ 

 = ¼ 

 = ¼ 

 = ¼ 

 y = 3x + 1 → dy/dx = 3

 S2 = 

 = 

 Keliling daerah = S1 + S2 = ¼ [6