Kalkulus (1240033)

Pertemuan Ke-10
BAB V Turunan

Juwairiah, S.Si,M.T
(juwai_riah@yahoo.com)

Sub Pokok Bahasan

- Turunan Fungsi Tingkat Tinggi
- Teorema L'Hospital

Kompetensi Khusus

Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai turunan fungsi

TURUNAN FUNGSI TINGKAT TINGGI

Diberikan fungsi $y = f(x)$

-Turunan ke – 1 : $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$

-Turunan ke – 2 : $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = y''$

-Turunan ke – 3 : $\frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) = y''' = f^3(x) = y^3$

-Turunan ke – n : $\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

Contoh : 1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2$

$f'(x) = 12x^2 - 10x$

$f''(x) = 24x - 10$

$f'''(x) = 24$

$f^4(x) = 0$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$f^n(x) = 0, n > 4$

2) Tentukan turunan ke-4 dari :

$$y = \sin 2x$$

Jawab :

$$y' = 2.\cos 2x$$

$$y'' = -2^2 \sin 2x$$

$$y''' = -2^3 \cos 2x$$

$$y^{(4)} = 2^4 \sin 2x$$

3) Tentukan $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ dari $f(x) = (2x+3)^4$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 4.(2x+3)^3.2 = 8(2x+3)^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8.(2x+3)^3.2 = 48(2x+3)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48.3(2x+3)^1.2 = 192(2x+3)$$

4) Carilah rumus umum turunan ke – n dari fungsi

$$y = x^n$$

Jawab :

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \underbrace{n(n-1) \cdot (n-2) \dots 3.2.1}_{} \cdot x^{n-n}$$

$$y^{(n)} = n!$$

5) Carilah rumus umum turunan ke – n dari fungsi

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Jawab :

$$y' = (-1).x^{-2}$$

$$y'' = (-1)(-2).x^{-3}$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3).x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3) \dots (-n).x^{-n-1}$$

$$= (-1)1.(-1).2.(-1).3 \dots (-1).n.x^{-n-1}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n.n! \; x^{-n-1}$$

5) Carilah rumus umum turunan ke – n dari fungsi

$$y = e^{1+2x}$$

Jawab :

$$y' = 2 . e^{1+2x}$$

$$y'' = 2 . 2. e^{1+2x} = 2^2 . e^{1+2x}$$

$$y''' = 2 . 2 . 2 . e^{1+2x} = 2^3 . e^{1+2x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 2^n . e^{1+2x}$$

TEOREMA L'HOSPITAL

Teorema L'Hospital adalah cara untuk menyelesaikan limit dengan menggunakan turunan

Jika bentuk $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ $atau$ $\frac{\infty}{\infty}, maka$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh :

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 4$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \to 3} \frac{3x}{2} = \frac{9}{2}$

Contoh :

3) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/\sin x}$ (Bentuk 1^{∞})

Jawab :

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} \cdot \ln \cos x}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{1/\cos x(-\sin x)}{\cos x}}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos^2 x}} = e^{-0/1} = e^0 = 1$$

Soal

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx - x}{6x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cosx - 1}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} x . \ln x$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)^{\cot x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{x^2 + 3x}$

8. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sec x - tan\, x)$

Referensi

- Purcell, Varberg, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Penerbit Erlangga, 1993
- Frank Ayres, *Calculus*, Mc.Graw Hill, New York, 1972
- J.Salas and Hill, *Calculus One and Several Variables*, John Willey& Sons, NewYork, 1982