IV. SISTEM PERSAMAAN LINIER (2)

Juwairiah, S.Si., M.T
Matriks dan Ruang Vektor (MRV)
Teknik Informatika-UPNVY

Penyajian SPL dalam bentuk Matrix

- SPL dengan n variabel :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

- SPL disajikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{array}{cccc} A & X & & B \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Atau AX = B

Matriks Augmented

Matriks Augmented = matriks gabungan antara matriks A dan B = [A | B]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriks Augmented

III. OPERASI BARIS ELEMENTER

SPL	MATRIKS
1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta tak nol.	1. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol.
2. Menukar posisi dua persamaan sebarang.	2. Menukar posisi dua baris sebarang.
3. Menambahkan kelipatan suatu persamaan ke persamaan lainnya.	3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Ketiga operasi ini disebut OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE). SPL atau bentuk matriksnya diolah menjadi bentuk sederhana sehingga tercapai 1 elemen tak nol pada suatu baris

OBE

Sifat matriks hasil OBE :

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
2. Pada baris yang berurutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Matriks dinamakan Eselon baris jika memenuhi sifat 1, 2, dan 3 (Proses Eliminasi *GAUSS*)

Matriks dinamakan Eselon Baris Tereduksi jika memenuhi semua sifat (Proses Eliminasi *GAUSS-JORDAN*)

Bentuk umum Eselon-baris

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

dimana lambang $*$ dapat diisi bilangan real sebarang.

Bentuk umum Eselon-baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

dimana lambang $*$ dapat diisi bilangan real sebarang.

Bentuk eselon-baris dan eselon-baris tereduksi

CONTOH bentuk eselon-baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONTOH bentuk eselon-baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SPL NON-HOMOGEN

A. Eliminasi Gauss atau Gaussian

Mengubah menjadi bentuk echelon-baris (tidak perlu direduksi), kemudian menggunakan substitusi mundur.

CONTOH 1: Selesaikan SPL non Homogen berikut dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN: Diperhatikan bentuk matriks augmented SPL berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

B2 – 2 B1
B3 – 3 B1

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

B2 x 1/2

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

B3 – 3B2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

B2 x (-2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh bentuk eselon-baris, dan digunakan substitusi mundur.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 9 - y - 2z \\ y &= -\tfrac{17}{2} + \tfrac{7}{2}z \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 - y \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

NB: Operasi Baris yang dilakukan bisa berbeda-beda, tetapi hasil akhirnya sama.

B. ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Ide pada metode eliminasi Gauss- Jordan adalah mengubah matriks ke dalam bentuk eselon-baris tereduksi.

Bentuk akhir contoh 1 dengan eliminasi Gauss dilanjutkan lagi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

B1 - 11/2 B3

B2+ 7/2 B3

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari hasil OBE didapat bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks ini disebut bentuk eselon-baris tereduksi.

maka SPL ini mempunyai penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3.

Contoh 2

Selesaikan SPL berikut:

–2z + 7v = 12

2x + 4y – 10z + 6u +12v = 28

2x + 4y – 5z + 6u – 5v = –1

SPL dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A x B

Matriks Augmented

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Didapat penyelesaian:

x+2y+3u = 7 → x = 7 – 2y – 3u

z = 1

v = 2

Terdapat banyak (tak terhingga) penyelesaian

Contoh 3

Selesaikan SPL berikut.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Bentuk matriks SPL ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}
\xrightarrow{B_2 - 2B_1}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{B_3 + 5B_2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}
\xrightarrow{B_4 + 4B_2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[B_3 \times 1/6]{B_3 \rightleftarrows B_4}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[B_1 + 2B_2]{B_2 - 3B_3}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow
\begin{array}{l}
x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\
x_3 + 2x_4 = 0 \\
x_6 = \frac{1}{3}
\end{array}
$$

Akhirnya diperoleh:

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Akhirnya, dengan mengambil x_2:= r, x_4:= s dan x_5:= t maka diperoleh penyelesaian:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \qquad x_2 = r, \qquad x_3 = -2s, \qquad x_4 = s, \qquad x_5 = t, \qquad x_6 = \frac{1}{3}$$

dimana r, s dan t bilangan real sebarang. Jadi SPL ini mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian.

Soal-soal

1) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
   $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
   $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

2) $x - y + 2z - w = -1$
   $2x + y - 2z - 2w = -2$
   $-x + 2y - 4z + w = 1$
   $3x - 3w = -3$

3) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$
   $x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$
   $x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$

Soal-soal

4) $2x_1 - 3x_2 = -2$

$2x_1 + x_2 = 1$

$3x_1 + 2x_2 = 1$

5) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$

$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

$11x_1 + 7x_2 = -30$

6) $4x_1 - 8x_2 = 12$

$3x_1 - 6x_2 = 9$

$-x_1 + 4x_2 = -6$